Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.28 Функциональный анализ

наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом

Направление подготовки / специальность

01.03.04 Прикладная математика

Направленность (профиль)

01.03.04 Прикладная математика

Форма обучения: очная

Год набора: 2020

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Программу составили ________________________________

д.ф.-м.н., профессор, Кириллов Кирилл Анатольевич

должность, инициалы, фамилия

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель преподавания дисциплины

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с основными принципами функционального анализа и примерами их приложений.

1.2 Задачи изучения дисциплины

Задачи изучения дисциплины – формирование навыков абстрактного математического мышления и умения применять методы функционального анализа в конкретных задачах прикладной математики.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
ОПК-1: Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	
ОПК-1.1: Знать математический аппарат, необходимый для решения профессиональных задач	Знать математический аппарат теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов, необходимый для решения профессиональных задач. Уметь применять знания теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов для анализа и обработки результатов при решении профессиональных задач. Владеть навыками использования теоретических основ базовых разделов функционального анализа («Элементы теории меры», «Измеримые функции. Интеграл Лебега», «Метрические пространства. Линейные нормированные пространства», «Гильбертовы пространства», «Линейные операторы и линейные функционалы. Сопряженные пространства») при решении профессиональных задач.

ОПК-1.2: Уметь применять знания фундаментальной математики, естественнонаучных дисциплин для анализа и обработки результатов при решении профессиональных задач;	Знать математический аппарат теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов, необходимый для решения профессиональных задач. Уметь применять знания теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов для анализа и обработки результатов при решении
	профессиональных задач. Владеть навыками использования теоретических основ базовых разделов функционального анализа («Элементы теории меры», «Измеримые функции. Интеграл Лебега», «Метрические пространства. Линейные нормированные пространства», «Гильбертовы пространства», «Линейные операторы и линейные функционалы. Сопряженные пространства») при решении профессиональных задач.
ОПК-1.3: Владеть навыками использования теоретических основ базовых разделов фундаментальной математики, естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач;	Знать математический аппарат теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов, необходимый для решения профессиональных задач. Уметь применять знания теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов для анализа и обработки результатов при решении профессиональных задач. Владеть навыками использования теоретических основ базовых разделов функционального анализа («Элементы теории меры», «Измеримые функции. Интеграл Лебега», «Метрические пространства. Линейные нормированные пространства», «Гильбертовы пространства», «Линейные операторы и линейные функционалы. Сопряженные пространства») при решении профессиональных задач.
ОПК-2: Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надежность и качество функционирования систем	

ОПК-2.1: Знать основные математические модели и методы решения исследовательских и проектных задач	Знать основные математические модели и методы решения исследовательских и проектных задач теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов.
	Уметь осуществлять проверку адекватности математических моделей теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов, анализировать полученные результаты. Владеть методами оценки надежности и качества функционирования систем, изучаемых в курсе «Функциональный анализ».
ОПК-2.2: Уметь осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты.	Знать основные математические модели и методы решения исследовательских и проектных задач теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов. Уметь осуществлять проверку адекватности математических моделей теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов, анализировать полученные результаты. Владеть методами оценки надежности и качества функционирования систем, изучаемых в курсе «Функциональный анализ».
ОПК-2.3: Владеть методами оценки надежности и качества функционирования систем.	Знать основные математические модели и методы решения исследовательских и проектных задач теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов. Уметь осуществлять проверку адекватности математических моделей теории меры и интеграла Лебега, теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теории линейных операторов и линейных функционалов, анализировать полученные результаты. Владеть методами оценки надежности и качества функционирования систем, изучаемых в курсе «Функциональный анализ».

1.4 Особенности реализации дисциплины

Язык реализации дисциплины: Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется с применением ЭО и ДОТ

URL-адрес и название электронного обучающего курса: https://e.sfu-kras.ru/course/view.php?id=1176

.

2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	Семестр	
		1	2
Контактная работа с преподавателем:	**2 (72)**		
занятия лекционного типа	1 (36)		
практические занятия	1 (36)		
Самостоятельная работа обучающихся:	**3 (108)**		
курсовое проектирование (КП)	Нет		
курсовая работа (КР)	Нет		
Промежуточная аттестация (Зачёт) (Экзамен)	**1 (36)**		

3 Содержание дисциплины (модуля)

3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="8">Контактная работа, ак. час.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">№ п/п</td><td rowspan="3">Модули, темы (разделы) дисциплины</td><td colspan="2" rowspan="2">Занятия лекционного типа</td><td colspan="4">Занятия семинарского типа</td><td colspan="2" rowspan="2">Самостоятельная работа, ак. час.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семинары и/или Практические занятия</td><td colspan="2">Лабораторные работы и/или Практикумы</td></tr>
<tr><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td></tr>
<tr><td colspan="10">1. Теория меры. Интеграл Лебега</td></tr>
<tr><td></td><td>1. Элементы теории множеств.*(А)
Операции над множествами. Отношения между множествами. Мощность множества. Понятие топологии. Кольца множеств. Полукольца множеств. Борелевские множества.</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2. Общее понятие меры.*(А)
Задачи, приводящие к необходимости пересмотра понятия интеграла. Понятие меры на полукольце. Аддитивные, счетно-аддитивные меры. Счетная аддитивность длины. Непрерывность и счетная аддитивность мер. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Свойства меры на кольце. Множества меры нуль.</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3. Лебегово продолжение меры.*(A) Внешняя и внутренняя меры. Измеримые множества. Элементарные неравенства для внешней меры. Критерий измеримости множества. Алгебра измеримых множеств и лебегово продолжение меры. Сигма-конечные меры. Измеримые множества для сигма-конечных мер.	1							
4. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега – Стилтьеса.*(A) Измеримые множества на прямой. Канторово множество. Счетная аддитивность меры Лебега – Стилтьеса. Абсолютно непрерывные меры и абсолютно непрерывные функции. Функция Кантора.	1							
5. Измеримые функции. Интеграл Лебега.*(A) Понятие измеримой функции. Различные типы сходимости. Свойства измеримых функций. Простые функции. Их связь с измеримыми. Теорема Егорова. Интеграл Лебега ограниченной измеримой функции на множестве конечной меры. Интегральная сумма Лебега. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. Элементарные свойства интегрируемых функций и интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.	1							

6. Предельный переход поз знаком интеграла. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.*(А) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Счетная аддитивность интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Леви и Фату о предельном переходе. Понятие интегрируемой функции и интеграла Лебега для множеств с счетно-конечной мерой. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана на отрезке.	2							
7. Двойной и повторный интегралы Лебега.*(А) Произведение мер. Теорема Фубини.	1							
8. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Отношения между множествами. Мощность множества. Понятие топологии. Кольца множеств. Полукольца множеств. Борелевские множества.			1					
9. Общее понятие меры. Задачи, приводящие к необходимости пересмотра понятия интеграла. Понятие меры на полукольце. Аддитивные, счетно-аддитивные меры. Счетная аддитивность длины . Непрерывность и счетная аддитивность мер. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Свойства меры на кольце. Множества меры нуль.			1					

	10. Лебегово продолжение меры. Внешняя и внутренняя меры. Измеримые множества. Элементарные неравенства для внешней меры. Критерий измеримости множества. Алгебра измеримых множеств и лебегово продолжение меры. Сигма-конечные меры. Измеримые множества для сигма-конечных мер.			1					
	11. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега – Стилтьеса. Измеримые множества на прямой. Канторово множество. Счетная аддитивность меры Лебега – Стилтьеса. Абсолютно непрерывные меры и абсолютно непрерывные функции. Функция Кантора.			1					
	12. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Понятие измеримой функции. Различные типы сходимости. Свойства измеримых функций. Простые функции. Их связь с измеримыми. Теорема Егорова. Интеграл Лебега ограниченной измеримой функции на множестве конечной меры. Интегральная сумма Лебега. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. Элементарные свойства интегрируемых функций и интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.			1					

13. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Счетная аддитивность интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Леви и Фату о предельном переходе. Понятие интегрируемой функции и интеграла Лебега для множеств с счетно-конечной мерой. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана на отрезке.			2					
14. Двойной и повторный интегралы Лебега. Произведение мер. Теорема Фубини.			1					
15. Теория меры. Интеграл Лебега							20	
2. Метрические пространства								
1. Понятие метрического пространства, примеры. Сходимость. Непрерывность отображений.*(А) Определение и примеры метрических пространств. Сходимость в метрических пространствах. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия.	2							

	2. Топология метрических пространств.*(А) Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Необходимые и достаточные условия замкнутости множества. Критерий непрерывности в точке для отображений метрических пространств. Полуметрические пространства.	2							
	3. Полные метрические пространства.*(А) Определение и примеры полных метрических пространств. Теоремы о полных метрических пространствах. Пополнение метрических пространств. Теоремы о продолжении.	2							
	4. Принцип сжимающих отображений.*(А) Теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения и ее следствия. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.	2							
	5. Компактные метрические пространства.*(А) Понятие компактности, предкомпактности, полной ограниченности. Теорема Хаусдорфа. Критерий компактности метрических пространств. Свойства компактных пространств. Признаки предкомпактности в конкретных метрических пространствах.	2							

6. Понятие метрического пространства, примеры. Сходимость. Непрерывность отображений. Определение и примеры метрических пространств. Сходимость в метрических пространствах. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия.			2					
7. Топология метрических пространств. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Необходимые и достаточные условия замкнутости множества. Критерий непрерывности в точке для отображений метрических пространств. Полуметрические пространства.			2					
8. Полные метрические пространства. Определение и примеры полных метрических пространств. Теоремы о полных метрических пространствах. Пополнение метрических пространств. Теоремы о продолжении.			2					
9. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения и ее следствия. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.			2					

10. Компактные метрические пространства. Понятие компактности, предкомпактности, полной ограниченности. Теорема Хаусдорфа. Критерий компактности метрических пространств. Свойства компактных пространств. Признаки предкомпактности в конкретных метрических пространствах.			2					
11. Метрические пространства							16	
3. Линейные нормированные пространства								
1. Определение и примеры линейных нормированных пространств. Банаховы пространства.*(А) Понятие линейного пространства, нормированного пространства. Непрерывность арифметических операций относительно заданной нормы. Понятие банахова пространства. Критерий полноты нормированного линейного пространства. Подпространства банахова пространства.	2							
2. Линейные операторы в нормированных пространствах.*(А) Понятие линейного оператора. Необходимые и достаточные условия непрерывности линейного оператора. Линейные функционалы. Норма линейного оператора.	1							

	3. Критерий конечномерности нормированного пространства. Эквивалентные нормы.*(А) Определение эквивалентных норм. Теорема об эквивалентности любых двух норм в пространстве n-мерном действительном пространстве и ее следствия. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности линейного нормированного пространства.	1							
	4. Гильбертовы пространства.*(А) Скалярное произведение. Определение и примеры предгильбертовых, гильбертовых пространств. Ортогональность. Теорема Пифагора. Теорема о проекции.	2							
	5. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве.*(А) Разложение по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве. Критерий существования полной счетной ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грамма – Шмидта. Изометрический изоморфизм всех сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах. Полные ортонормированные системы в пространствах функций двух переменных.	1							

6. Определение и примеры линейных нормированных пространств. Банаховы пространства. Понятие линейного пространства, нормированного пространства. Непрерывность арифметических операций относительно заданной нормы. Понятие банахова пространства. Критерий полноты нормированного линейного пространства. Подпространства банахова пространства.			2					
7. Линейные операторы в нормированных пространствах. Понятие линейного оператора. Необходимые и достаточные условия непрерывности линейного оператора. Линейные функционалы. Норма линейного оператора.			1					
8. Критерий конечномерности нормированного пространства. Эквивалентные нормы. Определение эквивалентных норм. Теорема об эквивалентности любых двух норм в пространстве n-мерном действительном пространстве и ее следствия. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности линейного нормированного пространства.			1					

9. Гильбертовы пространства. Скалярное произведение. Определение и примеры предгильбертовых, гильбертовых пространств. Ортогональность. Теорема Пифагора. Теорема о проекции.			2					
10. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Разложение по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве. Критерий существования полной счетной ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Изометрический изоморфизм всех сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах. Полные ортонормированные системы в пространствах функций двух переменных.			1					
11. Линейные нормированные пространства							28	
4. Линейные операторы								
1. Пространства линейных ограниченных операторов.* (А) Определение пространства линейных ограниченных операторов L(X,Y). Свойства пространства L(X,Y). Сильная сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха – Штейнгауза.	1							

2. Обратные операторы.*(А) Определение обратного оператора. Условия обратимости оператора. Теорема Банаха об обратном операторе и ее следствия.	1							
3. Пространства линейных ограниченных операторов. Определение пространства линейных ограниченных операторов L(X,Y). Свойства пространства L(X,Y). Сильная сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха – Штейнгауза.			1					
4. Обратные операторы. Определение обратного оператора. Условия обратимости оператора. Теорема Банаха об обратном операторе и ее следствия.			1					
5. Линейные операторы							8	
5. Сопряженные пространства и сопряженные операторы								
1. Линейные ограниченные функционалы.*(А) Определение линейного функционала. Примеры линейных ограниченных функционалов. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствия.	2							
2. Общий вид линейных ограниченных функционалов в некоторых пространствах.*(А) Линейные ограниченные функционалы в гильбертовом пространстве, в пространствах R^n, c_0, l_1, l_p (p>1), C[a,b], L_1[a,b], L_p[a,b] (p>1).	2							

3. Сопряженные операторы.*(А) Определение сопряженного оператора. Свойства сопряженных операторов. Примеры сопряженных операторов.	1							
4. Линейные ограниченные функционалы. Определение линейного функционала. Примеры линейных ограниченных функционалов. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствия.			2					
5. Общий вид линейных ограниченных функционалов в некоторых пространствах. Линейные ограниченные функционалы в гильбертовом пространстве, в пространствах R^n, c_0, l_1, l_p (p>1), C[a,b], L_1[a,b], L_p[a,b] (p>1).			2					
6. Сопряженные операторы. Определение сопряженного оператора. Свойства сопряженных операторов. Примеры сопряженных операторов.			1					
7. Сопряженные пространства и сопряженные операторы							20	
6. Компактные операторы. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве								

	1. Спектр оператора. Слабая сходимость. Рефлексивность.*(А) Определения резольвенты, спектра оператора. Теоремы о спектре и резольвенте. Спектр сопряженного оператора. Классификация точек спектра. Определение слабой сходимости последовательности в банаховом пространстве. Связь между понятиями слабой сходимости и сходимости по норме. Определение рефлексивного пространства. Примеры рефлексивных пространств.	1							
	2. Компактные операторы.*(А) Определение компактного оператора. Свойства компактных операторов. Компактность интегральных операторов. Уравнения с компактными операторами. Фредгольмовы операторы.	2							
	3. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.*(А) Определение сопряженного, самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Свойства самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Спектральное разложение самосопряженного компактного оператора.	1							

4. Спектр оператора. Слабая сходимость. Рефлексивность. Определения резольвенты, спектра оператора. Теоремы о спектре и езольвенте. Спектр сопряженного оператора. Классификация точек спектра. Определение слабой сходимости последовательности в банаховом пространстве. Связь между понятиями слабой сходимости и сходимости по норме. Определение рефлексивного пространства. Примеры рефлексивных пространств.			1					
5. Компактные операторы. Определение компактного оператора. Свойства компактных операторов. Компактность интегральных операторов. Уравнения с компактными операторами. Фредгольмовы операторы.			2					
6. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Определение сопряженного, самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Свойства самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Спектральное разложение самосопряженного компактного оператора.			1					
7. Компактные операторы. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве							16	
Всего	36		36				108	

4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

4.1 Печатные и электронные издания:

1. Треногин В. А. Функциональный анализ: учебник для студентов по специальностям "Математика" и "Прикладная математика"(Москва: Физматлит).
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа(Москва: Физматлит).
3. Шлапунов А. А., Работин В. В., Садыков Т. М. Функциональный анализ: конспект лекций(Красноярск: Сибирский федеральный университет [СФУ]).
4. Шлапунов А. А., Работин В. В., Садыков Т. М. Функциональный анализ. Операторные уравнения: учебное пособие(Красноярск: СФУ).
5. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика: [учебное пособие](Москва: Международная академическая издательская компания [МАИК] "Наука").
6. Босс В. Лекции по математике: Т. 5. Функциональный анализ: [краткое и ясное изложение предмета : учебное пособие : в 15-ти т.](Москва: URSS).
7. Иосида К., Волосов В. М. Функциональный анализ: перевод с английского(Москва: УРСС(URSS)).

4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):

1. Специальное программное обеспечение не требуется.

4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Доступ к информационным справочным системам не требуется.

5 Фонд оценочных средств

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Методика проведения занятий допускает как использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), так и классические аудиторные занятия, обеспечиваемые стандартными материально-техническими средствами.

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья в зависимости от нозологий осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения.